§8 Approximative Einsen und Quotienten

In diesem Abschnitt wollen wir in erster Linie Quotienten A/I von C^*-Algebren A nach abg. Idealen $I \subseteq A$ untersuchen. Ein wichtiges Hilfsmittel hierfür (und auch für andere Probleme) sind "approximierende Einsen" in A.

8.1 Def. Sei A eine normierte Algebra. Ein Netz $(u_\lambda)_\lambda$ in A heißt approximative Linkseins (bzw. Rechtseins), falls $u_\lambda a \to a$ (bzw. $au_\lambda \to a$) für alle $a \in A$. Ist $(u_\lambda)_\lambda$ approx. Links- und Rechtseins, so heißt $(u_\lambda)_\lambda$ approx. Eins in A.

8.2 Satz Sei A eine C^*-Algebra und sei $J \subseteq A$ ein dichtes Ideal in A (also $\overline{J} = A$). Dann gelten:

(1) $\exists$ approx. Eins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in A mit

a) $\forall \lambda \in \Lambda$ gilt: $0 \leq u_\lambda$, $\|u_\lambda\| \leq 1$ und $u_\lambda \in J$.

b) $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ gilt: $\lambda \leq \mu \Rightarrow u_\lambda \leq u_\mu$.

(2) Ist A separabel (dh. es ex. abzb. dichte Teilm. D in A), so ex. eine Folge $(u_n)_n$ wie in (1).

(3) Ist $I \subseteq A$ ein Rechtsideal (also $IA \subseteq I$), so ex. ein Netz $(u_\lambda)_\lambda$ in $I \cap A^+$ mit $(u_\lambda)_\lambda$ erfüllt (a)+(b) wie in (1) und $u_\lambda b \to b$ für alle $b \in \overline{I} \subseteq A$

(4) Analoges zu (3) gilt für Linksideale.

Bew: (1) Sei $\Lambda = \{F \subseteq J \mid F \text{ endl.}\}$ mit $F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2$

Zu $\lambda = \{x_1, \dots, x_e\} \in \Lambda$ sei

$$v_\lambda := x_1 x_1^* + \dots + x_e x_e^* \geq 0 \quad (\text{nach } 7.7 \text{ und } 7.4)$$

Wegen $v_\lambda \geq 0$ gilt $\sigma(v_\lambda) \subseteq [0,\infty)$ und $\sigma(v_\lambda + \frac{1}{e}1) \subseteq [\frac{1}{e}, \infty)$

und damit ist $v_\lambda + \frac{1}{\ell}1$ invertierbar in $\tilde{A}^1$
und wir setzen ($= A$ falls A unital, A^1 sonst)

$$u_\lambda := v_\lambda (v_\lambda + \tfrac{1}{\ell}1)^{-1} = f_\ell(v_\lambda) \text{ mit } f_\ell(t) = t(t+\tfrac{1}{\ell})^{-1}$$

Dann gilt $u_\lambda \in J$, da $v_\lambda \in J$ und J ist Ideal in A (und dann auch in $\tilde{A}^1$).
Wegen $0 \le f_\ell \le 1$ gilt $0 \le u_\lambda \le 1$ (in A^1) und damit $\|u_\lambda\| \le 1$. Ferner gilt für $\lambda = \{x_1, \dots, x_\ell\}$:

$$\sum_{i=1}^{\ell} [(u_\lambda - 1)x_i][(u_\lambda-1)x_i]^* = (u_\lambda - 1)\Big(\sum_{i=1}^{\ell} x_i x_i^*\Big)(u_\lambda - 1)$$

$$= (u_\lambda - 1) v_\lambda (u_\lambda - 1) = g_\ell(v_\lambda) \text{ mit } g_\ell(t) = t(f_\ell(t)-1)^2$$

<u>Nun gilt:</u> $f_\ell(t) - 1 = \frac{t}{t+\frac{1}{\ell}} - 1 = -\frac{\frac{1}{\ell}}{t+\frac{1}{\ell}} = -\frac{1}{\ell}(t+\frac{1}{\ell})^{-1}$

und $(t+\frac{1}{\ell})^2 = t^2 + \frac{2}{\ell}t + \frac{1}{\ell^2} \ge \frac{2}{\ell}t$, also $\frac{\ell}{2t} \ge (t+\frac{1}{\ell})^{-2}$.

<u>Damit folgt:</u> $g_\ell(t) = \frac{t}{\ell^2}(t+\frac{1}{\ell})^{-2} \le \frac{t}{\ell^2}\cdot\frac{\ell}{2t} = \frac{1}{2\ell} \xrightarrow{\text{glm.}} 0 \;\forall t \ge 0$
und da $\sigma(v_\lambda) \subseteq [0,\infty)$ folgt $g_\ell \xrightarrow{\text{glm}} 0$ auf $\sigma(v_\lambda)$.
Damit folgt:

$$0 \le [(u_\lambda - 1)x_i][(u_\lambda-1)x_i]^* \overset{7.16}{\le} g_\ell(v_\lambda) \text{ und damit}$$

$$\|u_\lambda x_i - x_i\|^2 = \|[(u_\lambda-1)x_i][(u_\lambda-1)x_i]^*\| \le \|g_\ell(v_\lambda)\|$$
$$= \|g_\ell\|_{\sigma(v_\lambda)} \le \frac{1}{2\ell}.$$

Damit folgt dann aber $\|u_\lambda x - x\| \to 0$ für alle $x \in J$, denn zu $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda_0 = \{x_1, \dots, x_\ell\} \in \Lambda$ mit $x = x_1$ und mit $\frac{1}{\sqrt{2\ell}} < \varepsilon$. Dann folgt $\|u_\lambda x - x\| < \varepsilon \;\forall \lambda \ge \lambda_0$.
Ist dann $a \in A$ bel., so folgt auch $\|u_\lambda a - a\| \to 0$, denn zu $\varepsilon > 0$ ex. ein $x \in J$ mit $\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{3}$, und dann gilt

$$\|u_\lambda a - a\| \le \underbrace{\|u_\lambda(a-x)\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|u_\lambda x - x\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ für }\lambda \ge \lambda_0} + \underbrace{\|x-a\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

für $\lambda \ge \lambda_0$ mit $\lambda_0 \in \Lambda$ geeignet.

Ebenso folgt für alle $a \in A$:

$\|au_\lambda - a\| = \|u_\lambda a^* - a^*\| \to 0$. Es folgt (1)(a).

Ist $\lambda \leq \mu$, also $\lambda = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, $\mu = \{x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$ so gilt zunächst:

$$v_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} x_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} x_i x_i^* = v_\mu ,$$

und dann $0 \leq v_\lambda + \frac{1}{\ell} 1 \leq v_\mu + \frac{1}{\ell} 1$ und mit 7.15 folgt dann auch

$$0 \leq (v_\mu + \tfrac{1}{\ell} 1)^{-1} \leq (v_\lambda + \tfrac{1}{\ell} 1)^{-1} \qquad (*)$$

Ferner gilt für $t \geq 0$: $\frac{1}{\ell}(t + \frac{1}{\ell})^{-1} \geq \frac{1}{m}(t + \frac{1}{m})^{-1}$, da für $t \geq 0$ die Abb. $s \to \frac{s}{t+s}$ monoton wachsend ist [es gilt $\left(\frac{s}{t+s}\right)' = \frac{t}{(t+s)^2} > 0$ für $t \geq 0$].

Damit folgt $\frac{1}{m}(v_\mu + \frac{1}{m} 1)^{-1} \leq \frac{1}{\ell}(v_\mu + \frac{1}{\ell} 1)^{-1} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\ell}(v_\lambda + \frac{1}{\ell} 1)^{-1}$

Wegen $f_m(t) = t(t + \frac{1}{m})^{-1} = 1 - \frac{1}{m}(t + \frac{1}{m})^{-1}$ (s.o.) folgt nun

$$u_\lambda = f_\ell(v_\lambda) = 1 - \tfrac{1}{\ell}(v_\lambda - \tfrac{1}{\ell} 1)^{-1} \overset{\text{(s.o.)}}{\leq} 1 - \tfrac{1}{m}(v_\mu + \tfrac{1}{m} 1)^{-1} = f_m(v_\mu) = u_\mu$$

(2) Ist A separabel, so auch J. Sei dann $(x_n)_n$ eine dichte Folge in J und setze $u_n = u_{\lambda_n}$ mit $\lambda_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ wie in (1). Dann folgt wie in (1), dass $(u_n)_n$ approx. Eins etc. ...

(3) Sei nun Λ die Menge aller endl. Teilm. in I und $(u_\lambda)_\lambda$ wie in (1) $\forall \lambda = \{x_1, \dots, x_n\} \in \Lambda$. Dann folgt der Beweis von (3) völlig analog zum Bew. von (1). ∎

8.3 Folgerung: Sei $I \subseteq A$ ein abg. Ideal in A. Dann gilt $I^* = I$. (Also: Jedes abg. Ideal in einer C^*-Alg. A ist ein $*$-Ideal, und insb. auch C^*-Unteralgebra).

Bew.: Sei $(u_\lambda)_\lambda \subset I$ wie in 8.2(3). Dann gilt für alle $x \in I$: $\|x^* u_\lambda - x^*\| = \|u_\lambda x - x\| \to 0$. Da $x^* u_\lambda \in I$ (da $u_\lambda \in I$) folgt dann auch $x^* \in I$ ∎

8.4 Bemerkung Sei A eine C^*-Alg. und sei $I \subseteq A$ ein abg. Ideal. Dann ist A/I versehen mit der Quot.-Norm

$$\|a + I\| = \inf\{\|a + c\| \mid c \in I\}$$

und der Multiplikation $(a+I)(b+I) = ab + I$ eine Banachalgebra (1.10). Da nach 8.3 auch $I^* = I$ gilt, wird durch

$$(a+I)^* = a^* + I$$

eine wohldef. Involution auf A/I definiert. Wir wollen sehen, dass A/I damit wieder eine C^*-Algebra wird. Dazu benötigen wir:

8.5 Lemma Sei I ein abg. Ideal in der C^*-Algebra A. Ist dann $(u_\lambda)_\lambda$ wie in 8.2(3), so gilt $\forall a \in A$:

$$\|a + I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\|.$$

Bew.: Wegen $u_\lambda \geq 0$ und $\|u_\lambda\| \leq 1$ gilt $\underbrace{\|1 - u_\lambda\|}_{\in \tilde{A}} \leq 1$ (7.3). Damit folgt $\|a - u_\lambda a\| \leq \|a\|$ $\forall \lambda \in \Lambda$ und es ex. $\limsup_\lambda \|a - u_\lambda a\|$ $\left(= \lim_\lambda \left(\sup_{\mu \geq \lambda} \|a - u_\mu a\|\right)\right)$.

Da $\|u_\lambda b - b\| \to 0$ $\forall b \in I$ folgt für alle $b \in I$ fix:

$$\limsup_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \limsup_\lambda \|a - u_\lambda a + \underbrace{b - u_\lambda b}_{\to 0}\|$$
$$= \limsup_\lambda \|(1 - u_\lambda)(a+b)\| \leq \sup_\lambda (\|1 - u_\lambda\| \|a+b\|) \leq \|a+b\|.$$

Damit folgt: $\|a+I\| = \inf_{b\in I} \|a+b\| \geq \limsup_\lambda \|a - u_\lambda a\|$
$\geq \liminf_\lambda \|a - u_\lambda a\| \geq \inf_\lambda \|a - \underbrace{u_\lambda a}_{\in I}\| \geq \inf_{b\in I} \|a+b\|$
$= \|a+I\|$. Es folgt die Behauptung. ☒

8.6 Satz Sei A C^*-Algebra und $I \subseteq A$ ein abg. Ideal. Dann ist $A/_I$ eine C^*-Algebra.

Bew: Wir müssen zeigen, dass $\|a^*a+I\| = \|a+I\|^2$. Sei dazu $(u_\lambda)_\lambda$ wie in 8.2(3). Dann folgt für alle $b \in I$:

$$\|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \leq \underbrace{\|(1-u_\lambda)b\|}_{\to 0}\underbrace{\|1-u_\lambda\|}_{\leq 1} \to 0. \quad (*)$$

Dann folgt mit 8.5 für alle $b \in I$:

$$\|a+I\|^2 = \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)a\|^2 \overset{C^*\text{-Bed.}}{=} \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\|$$
$$\overset{(*)}{=} \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)(a^*a+b)(1-u_\lambda)\| \leq \|a^*a+b\|.$$

Also folgt $\|a+I\|^2 \leq \inf_{b\in I} \|a^*a+b\| = \|a^*a+I\|^2$.

Da $A/_I$ Banachalgebra gilt aber auch
$\|a^*a+I\| \leq \|a^*+I\|\|a+I\| = \|a+I\|^2$. ☒

8.7 Bemerkung: Sind A, B Banachalgebren und ist $\phi: A \to B$ ein Algebra-Homom. mit $I = \ker\phi$, so ist I ein abg. Ideal in A und es ex. genau ein injektiver Algebren-Homomorphismus

$$\tilde{\phi}: A/_I \to B \text{ mit } \tilde{\phi}(a+I) = \phi(a) \quad \forall a \in A.$$

Sind A, B C^*-Algebren und ist ϕ ein $*$-Homom., so ist $\tilde{\phi}$ auch ein <u>injektiver</u> $*$-Homom. Da $A/_I$ eine C^*-Algebra ist, folgt mit 6.9, dass $\tilde{\phi}$ <u>isometrisch</u> ist. Damit ist $\phi(A) = \tilde{\phi}(A/_I)$

automatisch eine vollständige und damit abgeschlossene C^*-Unteralgebra von B?
Wir erhalten also:

8.8 Folgerung: Seien A, B C^*-Algebren und sei $\phi: A \to B$ ein $*$-Homom. Dann ist $\phi(A) \subseteq B$ eine C^*-Unteralgebra von B.

8.9 Folgerung: Sei B eine C^*-Unteralg. der C^*-Algebra A und sei I ein abg. Ideal in A. Dann ist
$B+I = \{b+c \mid b \in B, c \in I\} \subseteq A$ eine C^*-Unteralg. von A und es gilt $(B+I)/I \cong B/_{B \cap I}$ als C^*-Algebren.

Bew: Sei $q: A \to A/I$ die Quot-Abb. und sei $\psi := q|_B : B \to A/I$. Dann ist ψ ein $*$-Homom.,
also ist $\psi(B) = q(B)$ C^*-Unteralg. von A/I.
Damit ist $q^{-1}(\psi(B)) = B+I$ abgeschlossene C^*-Unteralg. von A. Ferner gilt $\ker \psi = B \cap I$, also folgt mit 8.8, dass

$$\tilde{\psi}: B/_{B \cap I} \to \psi(B) = (B+I)/I$$

ein isometr. $*$-Isomorphismus ist. ▣

8.10 Bem: In 7.4 haben wir gesehen, dass jedes Element a in einer C^*-Alg. A eine Zerlegung

$$a = (a_1 - a_2) + i(a_3 - a_4) \quad \text{mit } a_1, a_2, a_3, a_4 \in A^+$$

besitzt. Da für jedes $b \in A^+$ nach 7.7. ein $c \in A$ ex. mit $b = c^*c$ gilt $A = A^2 := LH\{cd \mid c, d \in A\}$
(man kann sogar zeigen, dass $A = \{cd \mid c, d \in A\}$).
Als Anwendung erhalten wir:

<u>8.11 Satz</u> Sei A eine C^*-Algebra und $I \subseteq A$ ein abg. Ideal in A. Ist dann $J \subseteq I$ ein abg. Ideal in I, so ist J auch ein abg. Ideal in A.

<u>Bew:</u> Es gilt mit 8.10:

$$JA = J^2 A = J(JA) \subseteq J(\overset{\subseteq I}{IA}) \subseteq JI \subseteq J$$ und analog auch $AJ \subseteq J$. ■